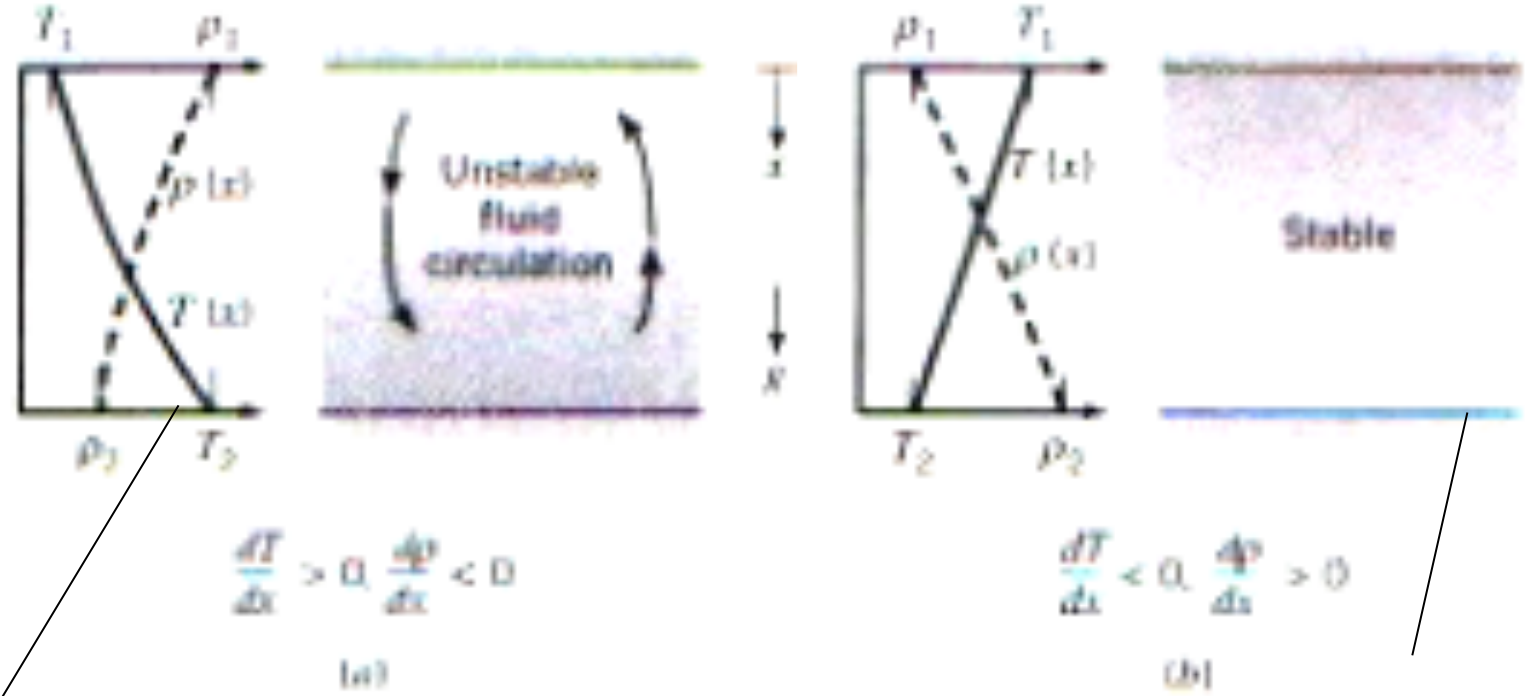
Capítulo 9 - Convecção Natural

- Movimento do fluido ocorre quando a força de corpo age num fluido com gradiente de densidade (causado por exemplo por ΔT) $\rightarrow$força de empuxo
- Velocidades são menores do que na convecção forçada ($\Rightarrow$h menores)

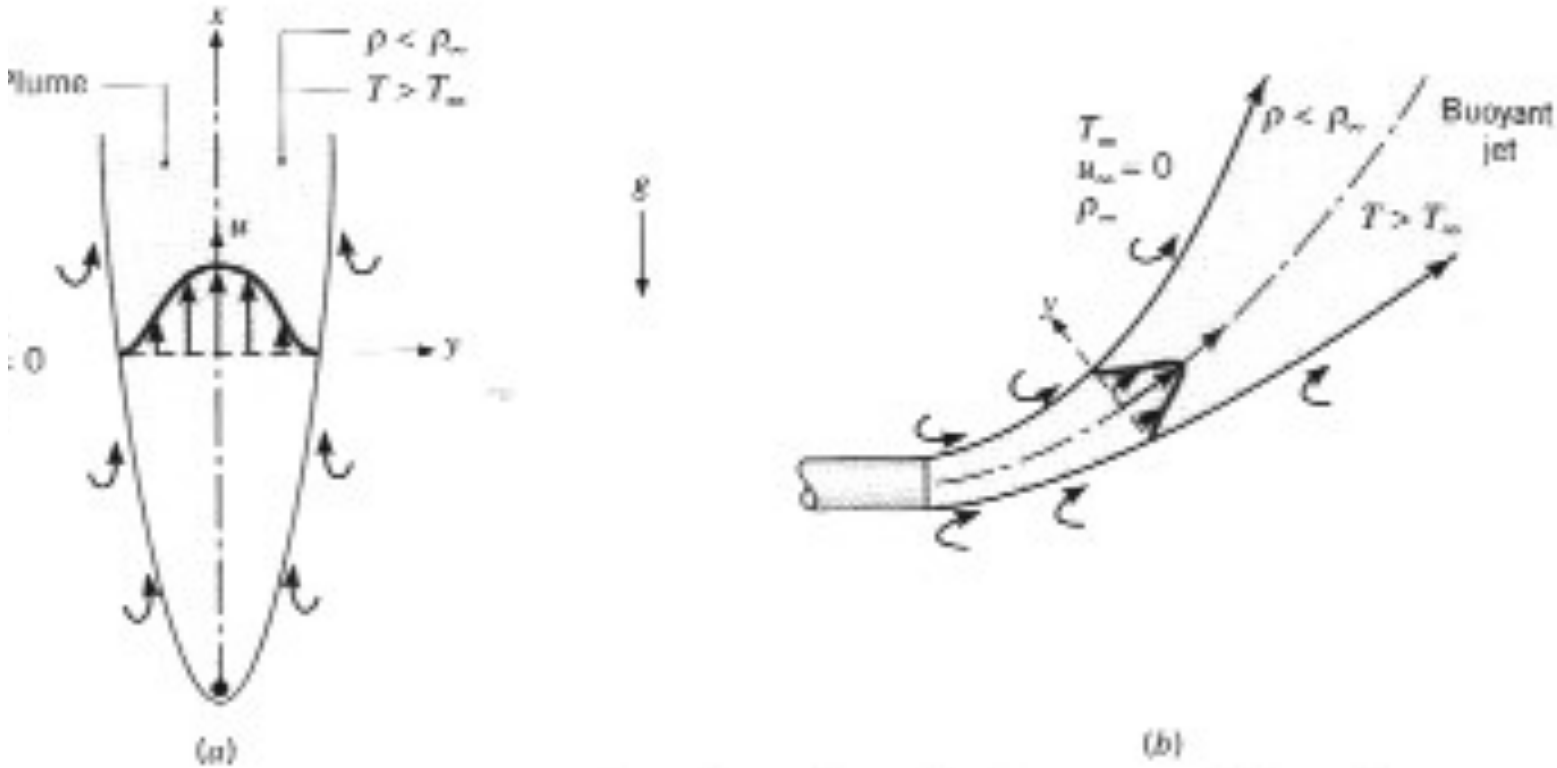
- Para gases e líquidos, ρ cai com T



$T_1 < T_2 \rightarrow \rho_1 > \rho_2$
troca de calor por convecção
Fluido quente (mais leve) sobe, e vai sendo resfriado, mas o fluido mais frio (mais pesado) desce, situação instável, ocorre circulação do fluido

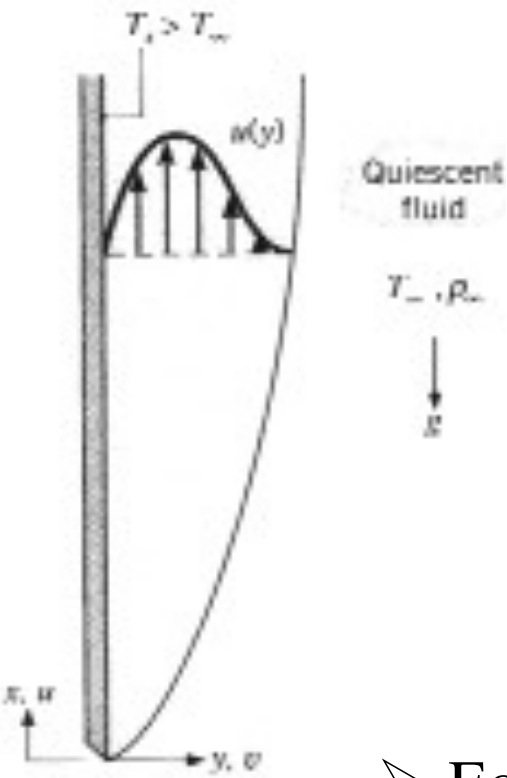
$T_1 > T_2 \rightarrow \rho_1 < \rho_2$:
troca de calor por condução (não há movimento)

- Em escoamentos não confinados



URE 9.2 Buoyancy-driven free boundary layer flows in an extensive, quiescent dium. (a) Plume formation above a heated wire. (b) Buoyant jet associated with a ated discharge.

- Equações que governam o problema de comvecção natural



- regime permanente, 2-D, propriedades constante (exceto densidade)
- hipóteses da Camada Limite são válidas

$$\delta << L \Rightarrow v << u \; ; \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cong 0$$

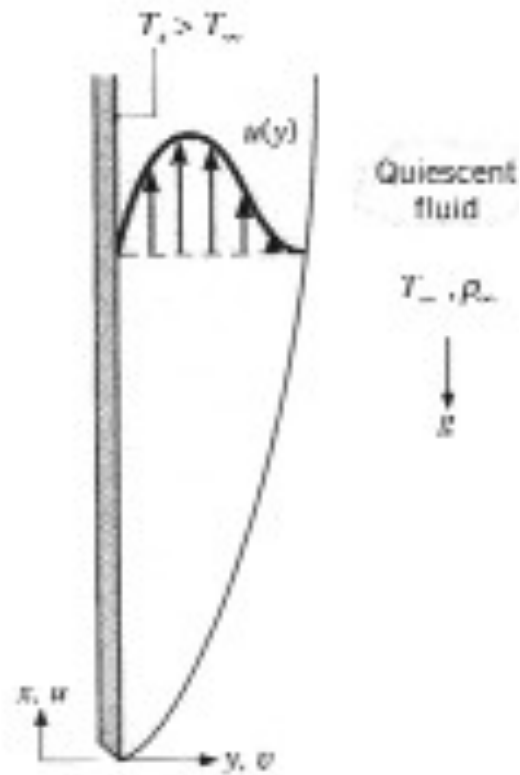
➢ Equação de *momentum* na direção *x*:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - g + \upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

➢ Equação de *momentum* na direção *y* (F_{cy}=0): $\partial p/\partial y$=0

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\substack{dentro\\CL}} = \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\substack{fora\\CL}} = -\rho_\infty g$$

➢ Equação de *momentum* na direção *x*:



$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \underbrace{g\frac{\rho_\infty - \rho}{\rho}}_{\textit{força empuxo}} + \upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

- Se a densidade varia apenas com a temperatura:

- Coeficiente de expansão térmica

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \approx -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\Delta \rho}{\Delta T}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{(\rho_\infty - \rho)}{(T_\infty - T)}$$

$$(\rho_\infty - \rho) \approx \rho\beta(T - T_\infty)$$

Equações de conservação da camada limite de convecção natural

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_\infty) + \upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$\Rightarrow$ As equações devem ser resolvidas de forma acoplada !

Obs.: Para gases ideais: $\rho = p/(RT) \Rightarrow \beta = 1/T$

- Similaridade

- Parâmetros adimensionais:

$$x^* \equiv \frac{x}{L} \quad y^* \equiv \frac{y}{L} \quad u^* \equiv \frac{u}{u_0} \quad v^* \equiv \frac{v}{u_0} \quad T^* \equiv \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty}$$

- Equações adimensionais:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L}{u_0^2} T^* + \frac{1}{\mathbf{Re}_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathbf{Re}_L \mathbf{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

-Número de Grashof: razão entre forças de empuxo e forças viscosas

$$Gr_L \equiv \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L}{u_0^2}\left(\frac{u_0 L}{\upsilon}\right)^2 = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\upsilon^2}$$

- Efeitos combinados de convecção forçada e natural devem ser considerados quando $Gr_L/Re_L^2 \approx 1 \Rightarrow Nu_L = f(Re_L, Gr_L, Pr)$

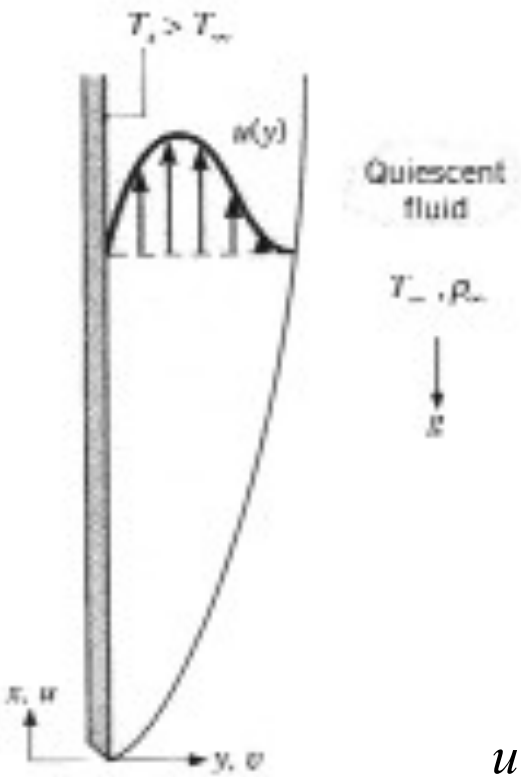
-Se $Gr_L/Re_L^2 << 1$: efeitos da convecção natural são desprezíveis

$Nu_L = f(Re_L, Pr)$

-Se $Gr_L/Re_L^2 >> 1$: efeitos da convecção forçada são desprezíveis

$Nu_L = f(Gr_L, Pr)$

- Convecção natural laminar numa superfície vertical



CC: $y=0 \quad u=v=0 \quad T=T_s$

$y \to \infty \quad u \to 0 \quad T \to T_\infty$

Solução das equações de conservação é obtida pelo método da similaridade

Parâmetro de similaridade: η

$$\eta \equiv \frac{y}{x}\left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4} \quad ; \quad \psi(x,y) \equiv f(\eta)\left[4\upsilon\left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4}\right]$$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} = 4\upsilon\left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4} f'(\eta)\frac{1}{x}\left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4}$$

$$= \frac{2\upsilon}{x} Gr_x^{1/2} f'(\eta) \qquad f' = df/d\eta$$

$$T^* \equiv \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} = g(\eta)$$

$$f''' + 3f\ f'' - 2(f')^2 + T^* = 0$$

$$T^{*''} + 3\,\mathbf{Pr}\ f\ T^{*'} = 0$$

$$CC: \eta = 0 \quad f = f' = 0 \quad T^* = 1$$

$$\eta \to \infty \quad f' \to 0 \quad T^* \to 0$$

Solução numérica:

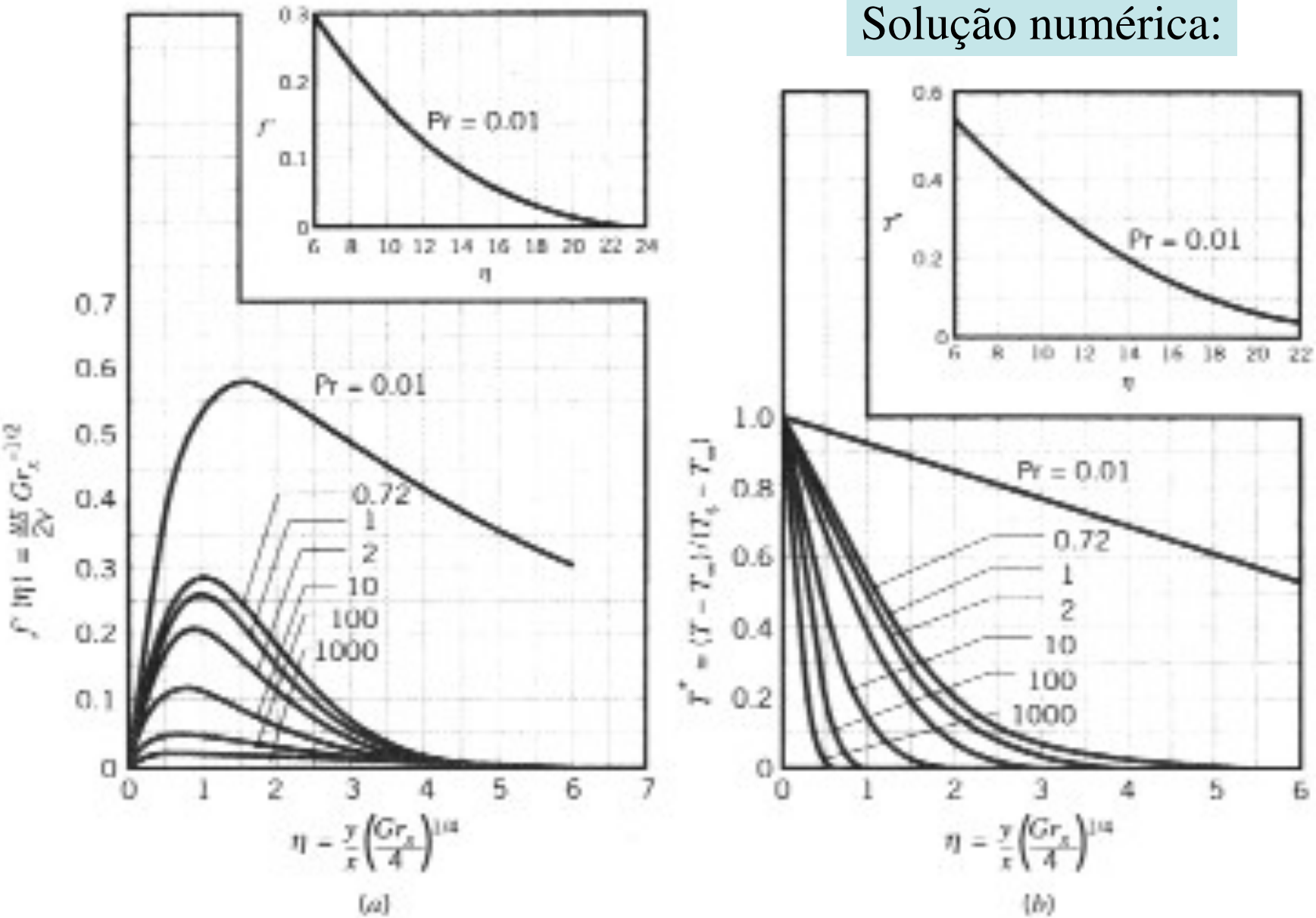


FIGURE 9.4 Laminar, free convection boundary layer conditions on an isothermal, vertical surface. (*a*) Velocity profiles. (*b*) Temperature profiles [3].

- Número de Nusselt: $$Nu_x = \frac{hx}{k} = \frac{[q_s'' /(T_s - T_\infty)]x}{k}$$

$$q_s'' = -k\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -\frac{k}{x}(T_s - T_\infty)\left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4}\frac{dT^*}{d\eta}\bigg|_{\eta=0}$$

$$Nu_x = -\left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4}\frac{dT^*}{d\eta}\bigg|_{\eta=0} = \left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4} g(\mathbf{Pr})$$

$$g(\mathrm{Pr}) = \frac{0.75\,\mathrm{Pr}^{1/2}}{(0.609 + 1.221\mathrm{Pr}^{1/2} + 1.238\,\mathrm{Pr})^{1/4}}$$

- Correlação obtida a partir dos resultados numéricos ($0<\mathrm{Pr}<\infty$):

Nusselt médio: $\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h\,dx$

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h dx = \frac{k}{L}\left[\frac{g\beta(T_s - T_\infty)}{4\nu^2}\right]^{1/4} g(\mathbf{Pr})\int_0^L \frac{dx}{x^{1/4}}$$

$$\overline{Nu_L} = \frac{4}{3}\left(\frac{Gr_L}{4}\right)^{1/4} g(\mathbf{Pr})$$

$$\Rightarrow \overline{Nu_L} = \frac{4}{3} Nu_L$$

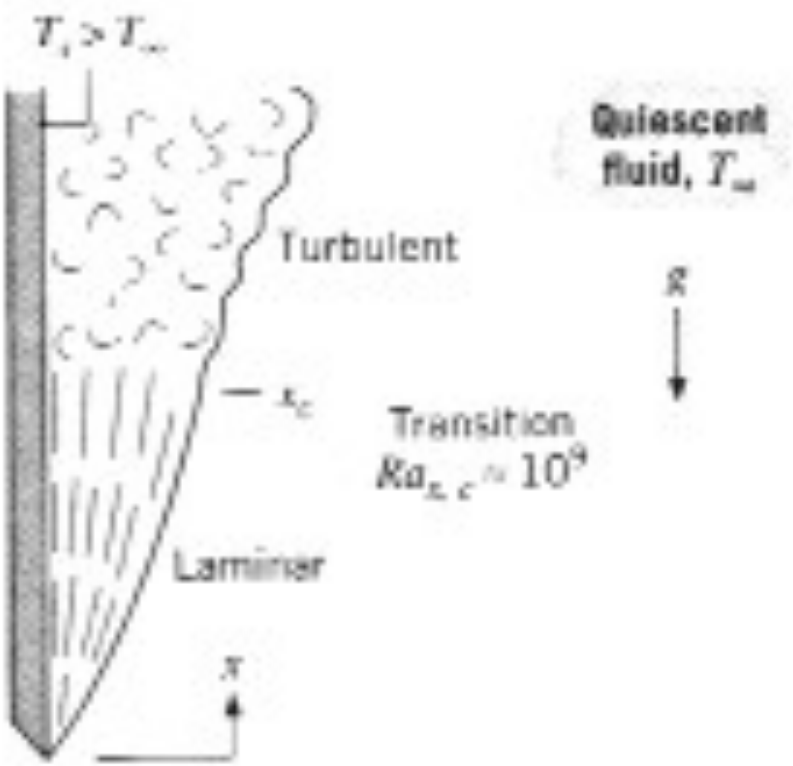
-Efeitos da turbulência

- Instabilidades podem causar a transição para esc. turbulento
- A transição depende da razão entre forças viscosas e de inércia
- Número de Rayleigh: Ra

$$Ra_x = Gr_x \, \mathbf{Pr} = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)x^3}{\upsilon \, \alpha}$$

- Para placa plana vertical,

$$Ra_{x,cr} = 10^9$$



Exemplo

Convecção natural sobre placa plana vertical (H=0,25 m; T_s=70 C; T_∞=25 C. Estime a espessura da camada limite para o ar parado, e para o caso em que o ar seja impulsionado sobre o placa, com velocidade de 5 m/s.

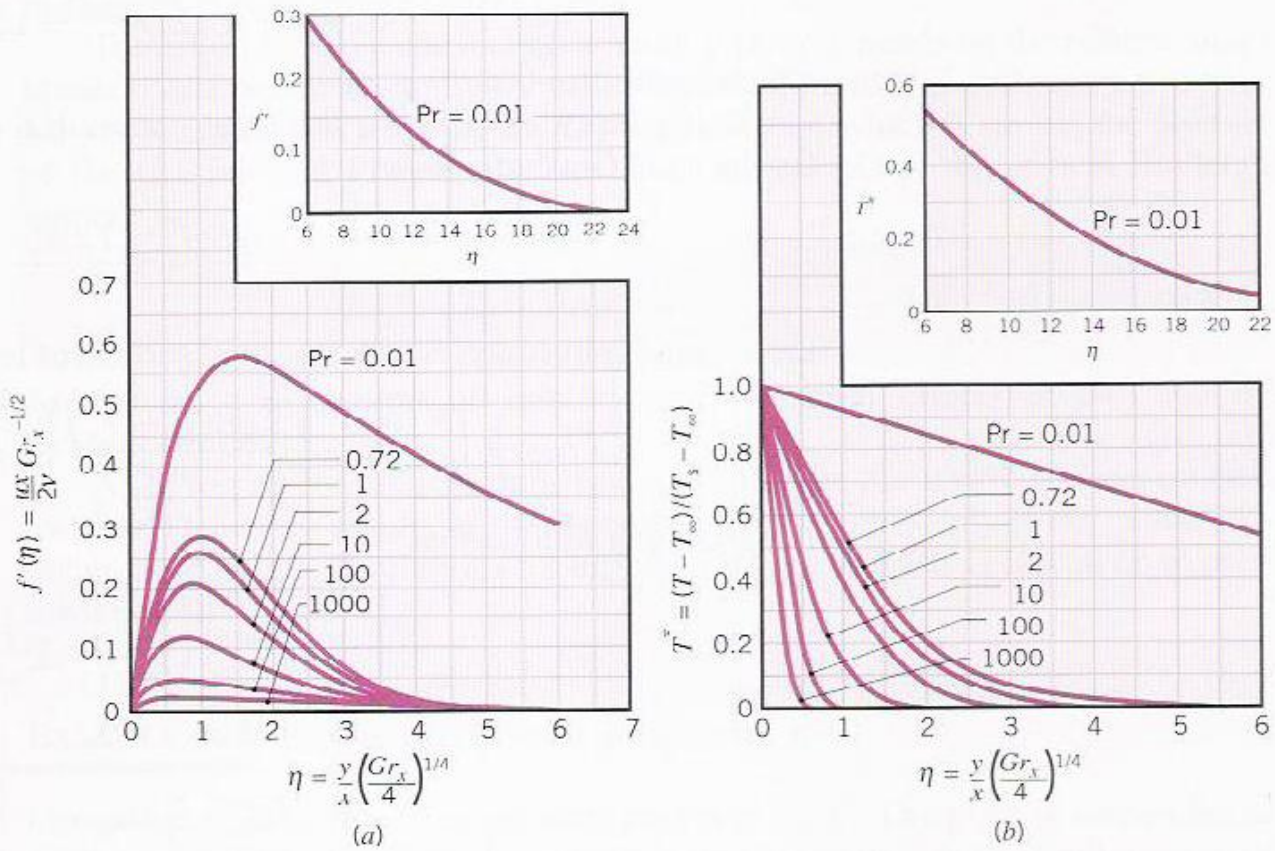


FIGURE 9.4 Laminar, free convection boundary layer conditions on an isothermal, vertical surface. (a) Velocity profiles. (b) Temperature profiles [3].

-Correlações empíricas

- As correlações em geral são da forma:

$$\overline{Nu_L} = \frac{\bar{h}L}{k} = CRa_L^n$$

- Tipicamente, n=1/4 para esc. laminar e 1/3 para esc. turbulento
- As propriedades são avaliadas a $T_f=(T_s-T_\infty)/2$

- Placa plana vertical

Correlação de Churchill e Chu (para qualquer Ra):

$$\overline{Nu_L} = \left\{0.825 + \frac{0.387Ra_L^{1/6}}{\left[1+(0.492/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2$$

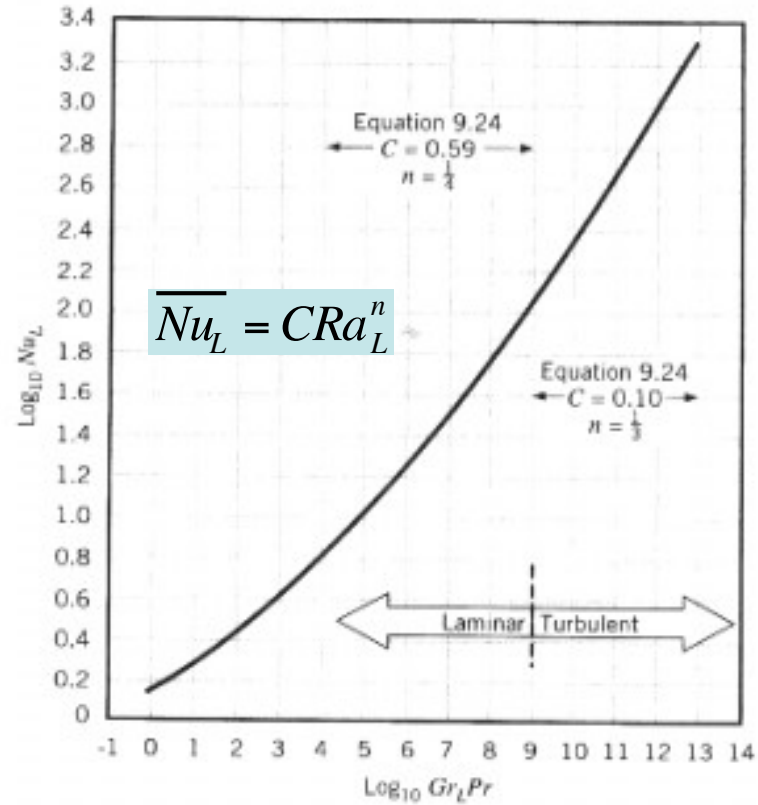
Para Ra<10^9: $$\overline{Nu_L} = 0.68 + \frac{0.670Ra_L^{1/4}}{\left[1+(0.492/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{4/9}}$$

-As correlações anteriores foram obtidas para T_s cte, mas podem ser usadas como boa aproximação com a CC de q''_s cte, definindo Nu_L e Ra_L em termos de $\Delta T_{L/2}=T_s(L/2)-T_\infty$ e $\bar{h}$

$$\text{Se } Nu_x \propto Ra_x^{1/4} \Rightarrow \frac{q_s'' x}{k\Delta T} \propto \Delta T^{1/4} x^{3/4}$$

$$\text{ou } \Delta T \propto x^{1/5}$$

$$\Rightarrow \Delta T_x \approx \frac{x^{1/5}}{(L/2)^{1/5}} \Delta T_{L/2} = 1.15\left(\frac{x}{L}\right)^{1/5} \Delta T_{L/2}$$



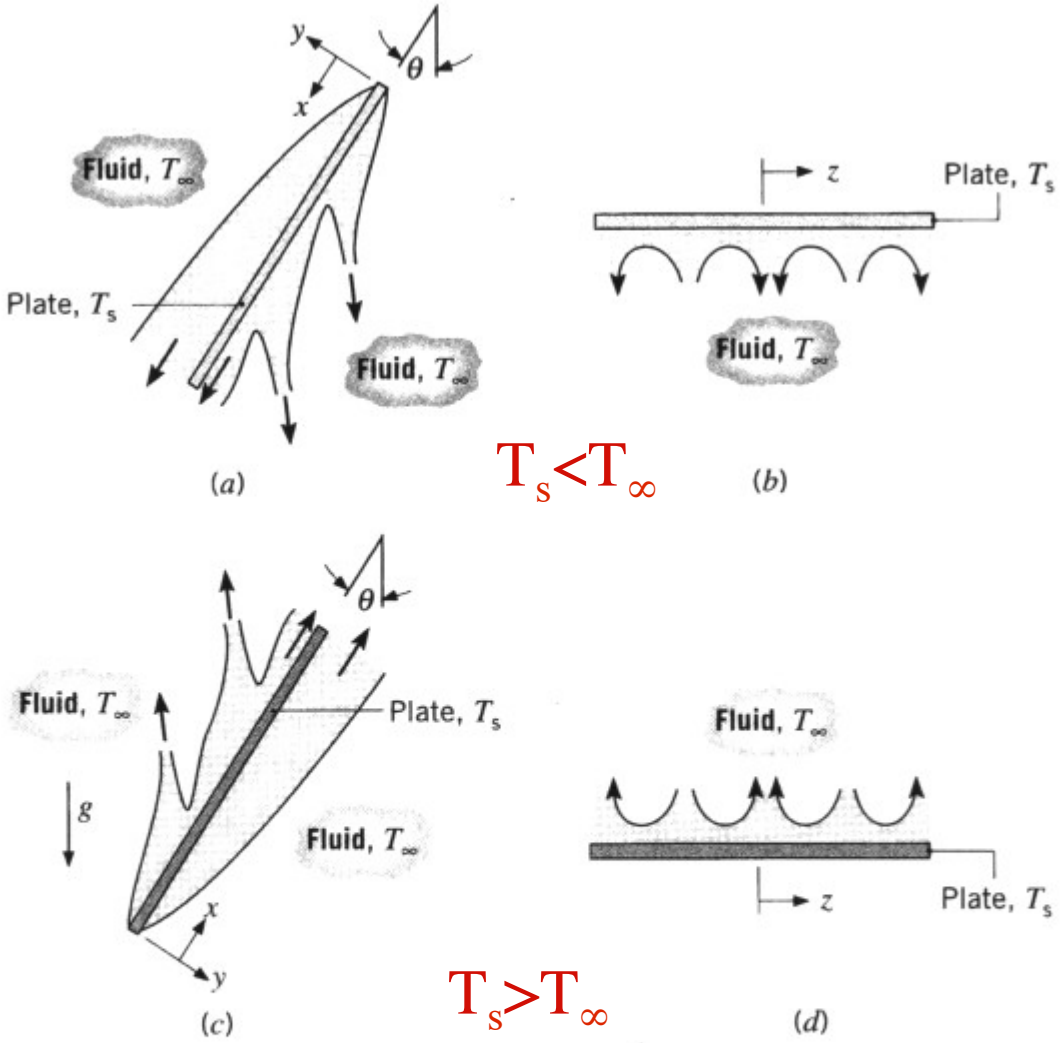
-Os resultados acima podem ser aplicados em cilindros verticais, se a espessura da CL $\delta \ll D$ (esta condição é satisfeita quando $D/L > 35/Gr_L^{1/4}$

-Placas horizontais e inclinadas

-Força de empuxo tem um componente normal a placa

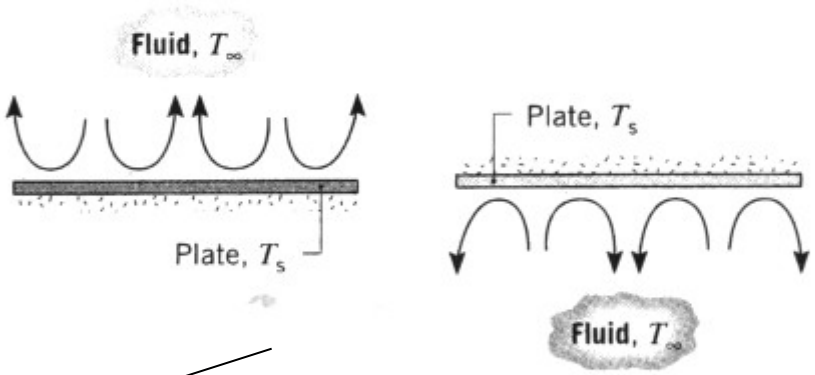
-Escoamento resultante é 3-D

-Nu pode ser calculado usando as correlações anteriores e substituindo g por gcosθ, nas regiões onde o esc. não é 3-D. Nas regiões 3-D não há correlações disponíveis na literatura



-Placas horizontais:
força de empuxo só tem a componente normal a superfície
- Correlações ($L=A_s/P$):

$T_s>T_\infty$ $T_s<T_\infty$



Escoamento sobre a placa - $T_s>T_\infty$
Escoamento abaixo da placa - $T_s<T_\infty$

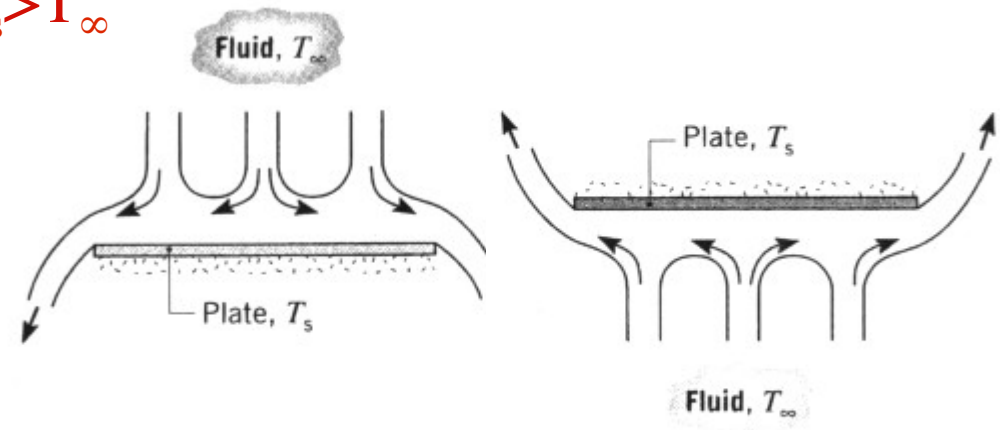
$$\overline{Nu_L} = 0.54 Ra_L^{1/4} \qquad (10^4 \le Ra_L \le 10^7)$$

$$\overline{Nu_L} = 0.15 Ra_L^{1/3} \qquad (10^7 \le Ra_L \le 10^{11})$$

$T_s<T_\infty$ $T_s>T_\infty$

Escoamento sobre a placa - $T_s<T_\infty$
Escoamento abaixo da placa - $T_s>T_\infty$

$$\overline{Nu_L} = 0.27 Ra_L^{1/4} \qquad (10^5 \le Ra_L \le 10^{10})$$



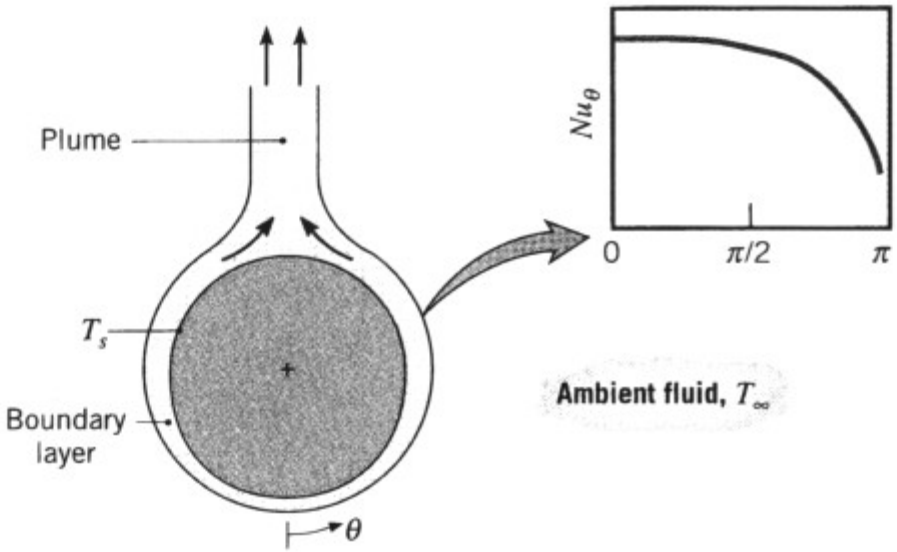
Exemplo: Um escoamento de ar através de um longo duto retangular de aquecimento, com 0,75 m de largura por 0,3 m de altura, mantém a superfície externa do duto a uma temperatura de 45°C. Se o duto não tem isolamento térmico e está exposto ao ar a 15°C no porão de uma casa, qual é a taxa de perda térmica no duto por metro de comprimento?

- Cilindro longo horizontal

- Correlação de Morgan: $\overline{Nu_D} = CRa_D^n$

- Correlação de Churchill e Chu:

$$\overline{Nu_D} = \left\{ 0.60 + \frac{0.387 Ra_D^{1/6}}{\left[1 + (0.559/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{8/27}} \right\}^2 \qquad Ra_D \leq 10^{12}$$



Exemplo

Uma tubulação de vapor horizontal de diâmetro igual a 0,1 m, passa através de um galpão, cujo ar ambiente e paredes são mantidos a 23 C. A temperatura da parede externa da tubulação é mantida a 165 C e a emissividade da superfície é igual a 0,85. Estime a perda de calor pela tubulação, por unidade de comprimento.

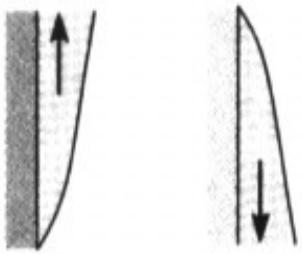
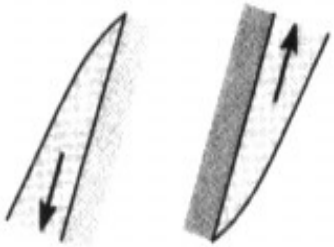
Propriedades do ar: Tf=367 K: k=0,0313 W/mK, ν=22,8x10^{-6} m^2/s, α=32,8x$10^{-6}m^2/s$, Pr=0,697, β=2,725x10^{-3} K^{-1}

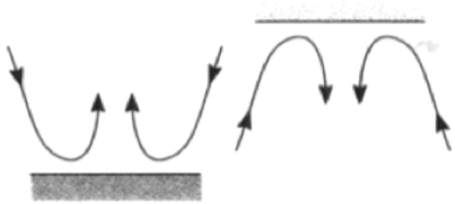
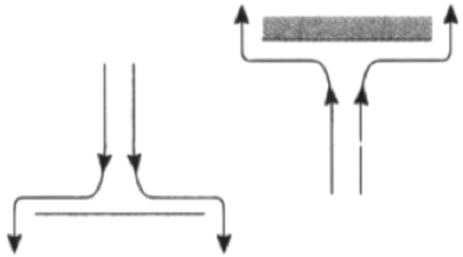
- Esferas

- Correlação de Churchill e Chu:

$$\overline{Nu_D} = 2 + \frac{0.589 Ra_D^{1/4}}{\left[1 + (0.469/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{4/9}} \qquad \mathrm{Pr} \geq 0.7 \;\; \mathrm{Ra_D} \leq 10^{11}$$

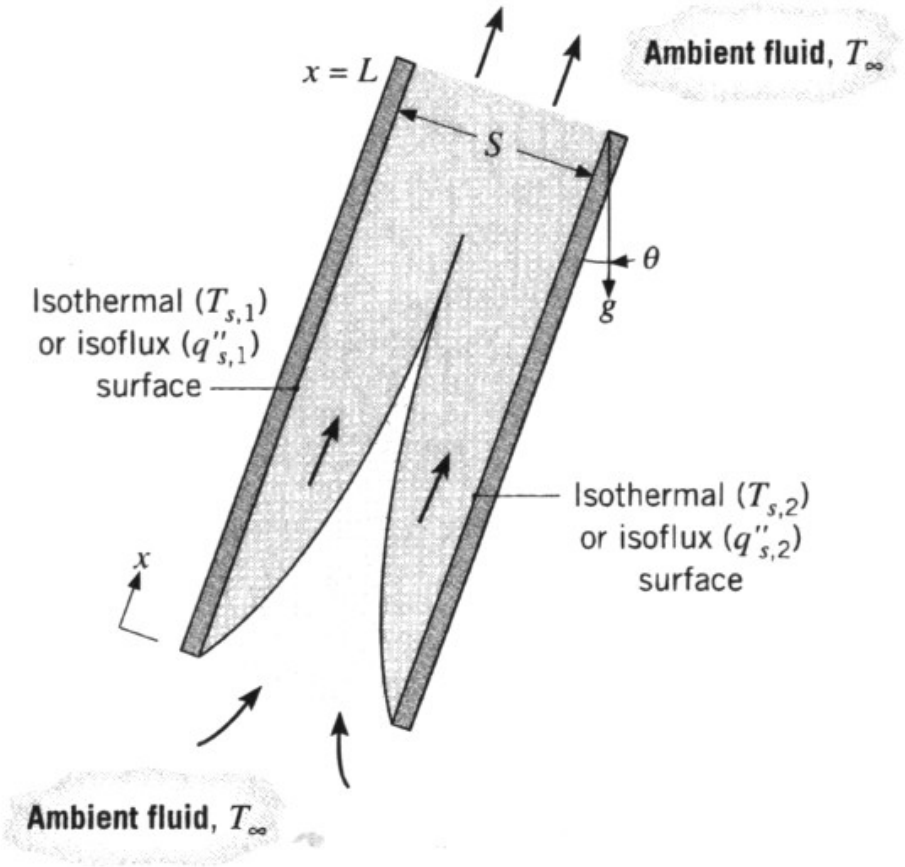
TABLE 9.2 Summary of free convection empirical correlations for immersed geometries

Geometry	Recommended Correlation	Restrictions
1. Vertical plates[a] 	Equation 9.26	None
2. Inclined plates Cold surface up or hot surface down 	Equation 9.26 $g \rightarrow g \cos \theta$	$0 \leq \theta \lesssim 60°$

Geometry	Recommended Correlation	Restrictions
3. Horizontal plates (a) Hot surface up or cold surface down 	Equation 9.30 Equation 9.31	$10^4 \lesssim Ra_L \lesssim 10^7$ $10^7 \lesssim Ra_L \lesssim 10^{11}$
(b) Cold surface up or hot surface down 	Equation 9.32	$10^5 \lesssim Ra_L \lesssim 10^{10}$
4. Horizontal cylinder 	Equation 9.34	$Ra_D \lesssim 10^{12}$
5. Sphere 	Equation 9.35	$Ra_D \lesssim 10^{11}$ $Pr \geq 0.7$

[a]The correlation may be applied to a vertical cylinder if $(D/L) \gtrsim (35/Gr_L^{1/4})$.

- Convecção natural entre 2 placas paralelas



- canais curtos: CL se desenvolve independentemente
-canais longos: CL se encontram →esc. desenvolvido
-canais inclinados: 2 componentes da força de empuxo →esc. 3-D

- Canais verticais:

•Correlação de Elenbaas: placas isotérmicas, simetricamente aquecidas

$$\overline{Nu_s} = \frac{1}{24} Ra_s \left(\frac{S}{L}\right)\left\{1 - \exp\left[-\frac{35}{Ra_s(S/L)}\right]\right\}^{3/4}$$

$$\overline{Nu_s} = \left(\frac{q/A}{T_s - T_\infty}\right)\frac{S}{k}$$

$$Ra_s = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)S^3}{\alpha\nu}$$

esc. desenvolvido: S/L→0 e $\overline{Nu_{s,des}} = \dfrac{Ra_s(S/L)}{24}$

propriedades a temperatura na entrada

- CC: $T_{s,1}$ = cte e $q''_{s,2}$ = cte

$$\overline{Nu}_{s,des} = \frac{Ra_s(S/L)}{12}$$

- Para superfícies com fluxo constante, deve-se definir Nu e Ra como

$$Nu_s = \left(\frac{q''_s}{T_{s,L} - T_\infty}\right)\frac{S}{k}$$

$$Ra^*_s = \frac{g\beta q''_s S^4}{k\alpha\nu}$$

- CC simétrica de fluxo constante nas 2 placas

$$Nu_{s,Lde\,s} = 0.144\left[Ra_s^*(S/L)\right]^{1/2}$$

- CC de fluxo cte numa placa e adiabática em outra

$$Nu_{s,Lde\,s} = 0.204\left[Ra_s^*(S/L)\right]^{1/2}$$

-Correlação de Bar-Cohen e Rohsenow: para qualquer S/L e CC isotérmica ($Ra_s < 10$) e de fluxo cte ($Ra_s > 100$)

- C_1 e C_2 são funções da CC - Tabela

$$\overline{Nu_s} = \left[\frac{C_1}{(Ra_s S/L)^2} + \frac{C_2}{(Ra_s S/L)^{1/2}}\right]^{-1/2}$$

$$Nu_{s,L} = \left[\frac{C_1}{(Ra^*_s S/L)} + \frac{C_2}{(Ra^*_s S/L)^{2/5}}\right]^{-1/2}$$

propriedades a $T_m=(T_s+T_\infty)/2$ ou $T_m=(T_{s,L}+T_\infty)/2$

-S_{opt}: distância entre as placas que fornece a máxima troca de calor num *array* de placas→fornece o valor máximo do produto de *h* pela área da superfície.

-S_{max}: distância que maximiza a troca de calor em cada placa →quando uma placa não é influenciada pela outra

-Troca de calor de cada placa cai quando S cai, mas o número de placas que pode ser colocado num volume fixo cresce.

Condições superficiais	C_1	C_2	S_{opt}	S_{max}
Placas isotérmicas simétricas $T_{s1}=T_{s2}$	576	2,87	$2,71\ (Ra_s/S^3L)^{-1/4}$	1,71
Placas com fluxos uniformes simétricas $q''_{s1}=q''_{s2}$	48	2,51	$2,12\ (Ra^*_s/S^4L)^{-1/5}$	4,77
Placas isotérmica e adiabática, T_{s1}, $q''_{s2}=0$	144	2,87	$2,15\ (Ra_s/S^3L)^{-1/4}$	1,71
Placas com fluxo uniforme e adiabática, $q''_{s1}= q''_{s2}=0$	24	2,51	$1,69\ (Ra^*_s/S^4L)^{-1/5}$	4,77

-Canais inclinados: Correlação de Azevedo e Sparrow

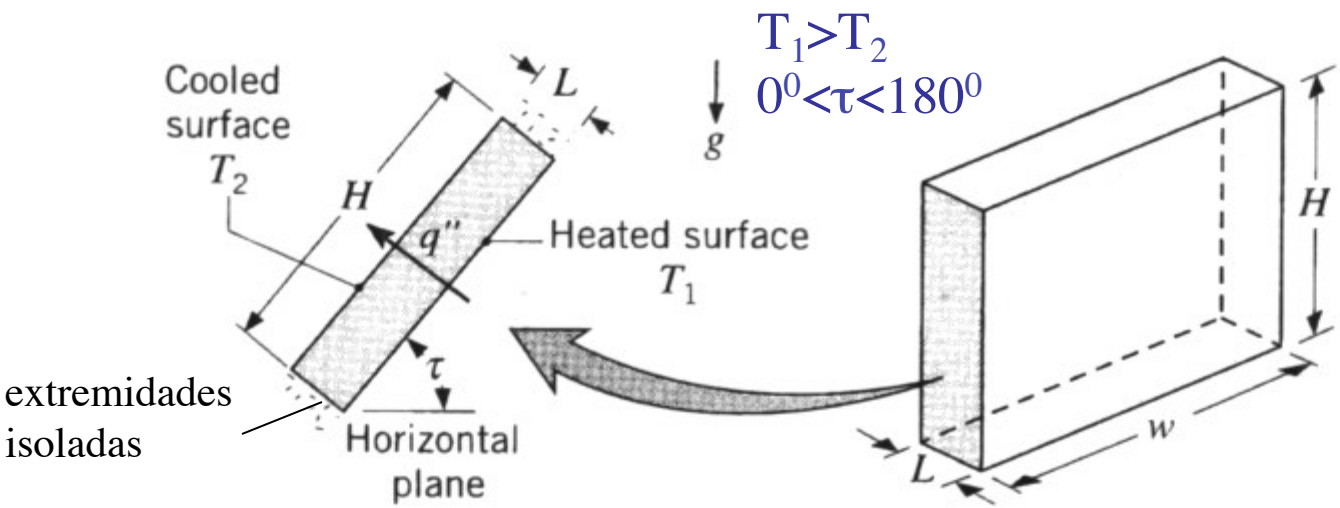
- para placas isotérmicas e isotérmica-isolada, e $0<\theta<45^0$
- $Ra_s(S/L)>200$

$$\overline{Nu_s} = 0.645\left[Ra_s\,(S/L)\right]^{1/4}$$

propriedades a $T_m=(T_s+T_\infty)/2$

- Correlações empíricas para cavidades fechadas

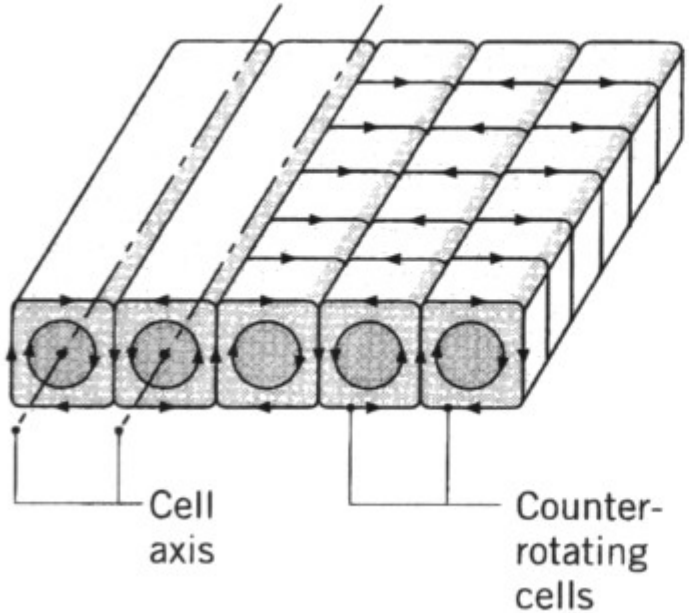
- Cavidades retangulares



$q''=h(T_1-T_2)$
depende de H/L
e de τ. Para w/L grandes,
q" independe de w/L
(vamos estudar apenas
estas situações)

-Cavidade retangular horizontal

- $Ra < Ra_{L,c}=1708$, forças de empuxo são menores do que as forças viscosas e não ocorre movimento Troca de calor por condução.
- $1708 < Ra < 5x10^4$, movimento do fluido se dá em forma de células igualmente espaçadas
- Para maiores valore de Ra, as células se quebram e o movimento é turbulento



-Correlação de Globe e Dropkin (para baixos L/H):

$$\overline{Nu_L} = \frac{\bar{h}L}{k} = 0.069 Ra_L^{1/3} \Pr^{0.074}$$

$$3x10^5 < Ra_L < 7x10^9$$

propriedades a $T_m=(T_1+T_2)/2$

-Cavidade vertical:

- Fluido sobe pela parede aquecida e desce pela parede fria
- Para baixos Ra_L (< 10^3) o movimento devido ao empuxo é fraco e a troca de calor se dá por condução

- Correlações empíricas (propriedades a $T_m=(T_1+T_2)/2$)

$$\overline{Nu_L} = 0.22\left(\frac{\Pr}{0.2+\Pr}Ra_L\right)^{0.28}\left(\frac{H}{L}\right)^{-1/4}$$

$2<H/L<10$
$\rightarrow \Pr<10^5$
$10^3<Ra_L<10^{10}$

$$\overline{Nu_L} = 0.18\left(\frac{\Pr}{0.2+\Pr}Ra_L\right)^{0.29}$$

$1<H/L<2$
$\rightarrow 10^{-3}\Pr<10^5$
$10^3<Ra_L\Pr/(0.2+\Pr)$

$$\overline{Nu_L} = 0.42 Ra_L^{1/4}\Pr^{0.012}\left(\frac{H}{L}\right)^{-0.3}$$

$10<H/L<40$
$\rightarrow 1<\Pr<2x10^4$
$10^4<Ra_L<10^7$

$$\overline{Nu_L} = 0.046 Ra_L^{1/3}$$

$1<H/L<40$
$\rightarrow 1<\Pr<20$
$10^6<Ra_L<10^9$

- Cilindros concêntricos

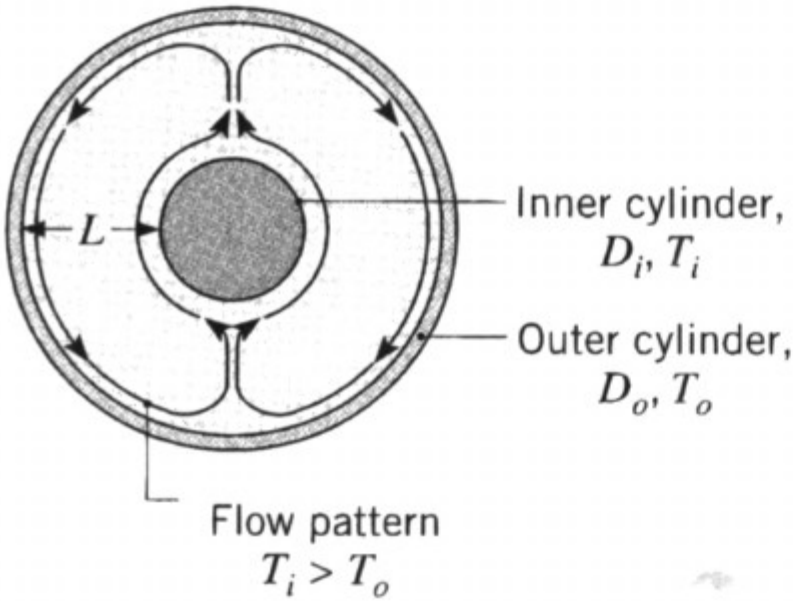
-Formação de 2 células simétricas

-Fluido sobe pelo parede aquecida e desce pela parede fria

$$q' = \frac{2\pi k_{ef}}{\ln(D_o/D_i)}(T_i - T_o) \qquad (10^2 \le Ra_c^* \le 10^7)$$

$$\frac{k_{ef}}{k} = 0.386\left(\frac{\Pr}{0.861+\Pr}\right)^{1/4}(Ra_c^*)^{1/4}$$

$$Ra_c^* = \frac{[\ln(Do/Di)]^4}{L^3(D_i^{-3/5}+D_o^{-3/5})^5}Ra_L$$



- Esferas concêntricas

$$q' = \pi k_{ef}\left(\frac{D_o D_i}{L}\right)(T_i - T_o) \qquad (10^2 \le Ra_s^* \le 10^4)$$

$$\frac{k_{ef}}{k} = 0.74\left(\frac{\mathbf{Pr}}{0.861+\mathbf{Pr}}\right)^{1/4}(Ra_s^*)^{1/4}$$

$$Ra_s^* = \frac{LRa_L}{(Do/Di)^4(D_i^{-7/5}+D_o^{-7/5})^5}$$

- Convecção mista

- Situações em que a convecção natural é comparável a forçada
- $(Gr_L/Re_L^2) \approx 1$
- Em geral usa-se como primeira aproximação:

$$Nu^n = Nu_F^n \pm Nu_N^n$$

n=3 ou 7/2 ou 4